

MECÂNICA DAS ESTRUTURAS

Viga engastada e apoiada

Gerado em 2026-09-16T00:00:00.000Z · Análise estática linear 2D · Sistema interno: kN, m, rad.

1. Identificação e objetivos

Estudante: Demonstração do laboratório. Atividade: Viga hiperestática.

5. Formular equilíbrio e compatibilidade; 7. Escolher incógnitas do método; 9. Relacionar forças, deslocamentos e rigidez; 10. Verificar por argumentos físicos, dimensionais e numéricos

Evidência esperada: Construir o balanço principal e resolver $f_{BB} X_B + \Delta B^{(0)} = 0$.

2. Problema e perguntas investigativas

Uma viga de 6 m engastada à esquerda e apoiada à direita recebe 10 kN/m. Libere a reação vertical B e restabeleça sua compatibilidade.

A reação B será metade da carga total?

3. Modelo físico e idealizações

Estática linear 2D: Equilíbrio no plano e superposição de efeitos. Exclui dinâmica, torção espacial e efeitos de segunda ordem. Amplie o modelo se cargas variam rapidamente ou se a estabilidade depende da deformação.

Pequenos deslocamentos: Equilíbrio na geometria inicial; deformações infinitesimais. Exclui grandes rotações e efeito $P-\Delta$. Compare deslocamentos ao comprimento e rotações à unidade.

Elasticidade linear: $N = EA \varepsilon$ e $M = EI \kappa$, com E constante em cada elemento. Exclui plastificação, fissuração, fluência e dano. Resposta elástica não comprova resistência.

Treliça ideal: Nós articulados, barras retas, carga aplicada somente nos nós; esforço axial. Exclui flexão das barras e excentricidade das ligações. Cargas em barras são rejeitadas.

Euler-Bernoulli e pórtico: Seções planas permanecem normais ao eixo; pórticos incluem alongamento axial. Exclui deformação por cisalhamento. Vigas curtas/altas podem requerer Timoshenko.

Propriedades por elemento: E, A e I constantes; cargas distribuídas constantes por trecho. Seção variável precisa de discretização explícita. Resistência, flambagem e dimensionamento normativo não são implementados.

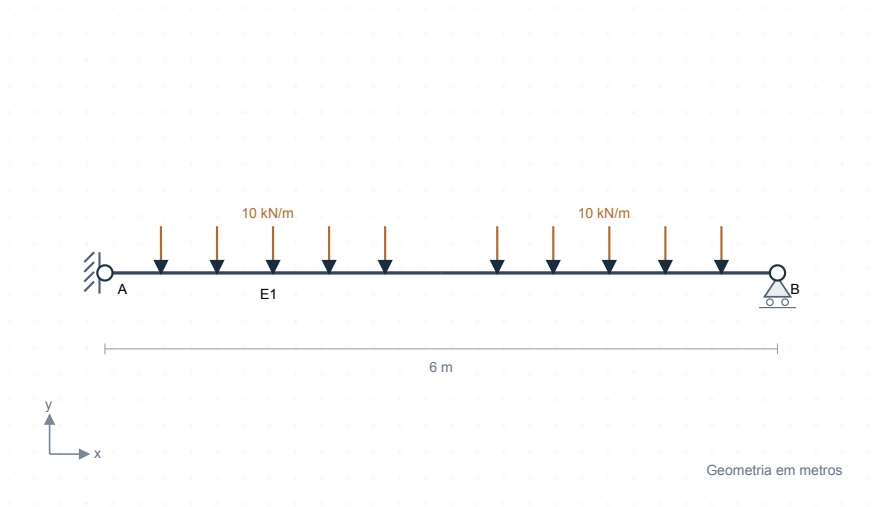


Figura 1. Modelo físico, apoios e ações. Eixo global x à direita, y para cima; momentos positivos anti-horários.

4. Dados de entrada e unidades

E em GPa; A em cm²; I em cm⁴ (eixo z perpendicular ao plano). Conversão: E × 10⁶ kN/m²; A × 10⁻⁴ m²; I × 10⁻⁸ m⁴.

Nó	x, y (m)	Vínculos ux, uy, θ	Ações Fx, Fy, M	Prescritos m, m, rad
A	0; 0	prescrito; prescrito; prescrito	0; 0; 0	0; 0; 0
B	6; 0	livre; prescrito; livre	0; 0; 0	0; 0; 0

Elemento	Nós	E (GPa)	A (cm²)	I (cm⁴)	Liberações θ
E1	A → B	210	40	8.000	Nenhuma

Cargas nos elementos: posições relativas x/L; forças kN; momentos kN·m; cargas uniformes kN/m.

Elemento	Tipo / eixo	Posição ou trecho	qx/Fx	qy/Fy	M
E1	Uniforme / local	0 a 1	0	-10	0

5. Previsões do estudante

Não fornecidas. Nenhuma previsão foi atribuída ao estudante.

6. Fundamentação matemática

Identidades teóricas: equilíbrio, compatibilidade e relações constitutivas. Rigidez direta integra a família dos métodos dos deslocamentos; análise matricial também admite formulações de flexibilidade.

$$\begin{aligned}N &= EA \varepsilon & M &= EI \kappa \\K_{ff} d_f &= F_f - K_{fc} d_c \\R_c &= K_{cf} d_f + K_{cc} d_c - F_c\end{aligned}$$

f identifica coordenadas livres; c, prescritas. Deslocamentos em m, rotações em rad, forças em kN e momentos em kN·m. Cada coeficiente de K tem unidade de força generalizada por deslocamento generalizado.

7. Desenvolvimento dos métodos

Rigidez: 3 nós de cálculo, 2 segmentos, 5 GDL livres, 4 prescritos e 0 rotações inativas. Cada matriz local é transformada por $T^T k T$, montada por conectividade e reduzida pelos vínculos. Solução por Cholesky com escala diagonal; limite de pivô relativo 10^{-12} . Matriz irrestrita pode ser singular; o diagnóstico usa K_{ff} .

Uma coluna de k representa forças de extremidade associadas a deslocamento unitário da coordenada correspondente, com as demais nulas. Cargas equivalentes e liberações são incluídas por condensação estática. Contagem de indeterminação: 1; estabilidade também foi avaliada pela fatoração.

Trabalho virtual

$$Q^* \delta = \sum \int (NN^*/EA + MM^*/EI) dx - \sum R_c^* d_c$$

Ação auxiliar: 1 kN em @E1:1, uy. O sistema auxiliar é resolvido por rigidez direta com os mesmos vínculos e deslocamentos de apoio nulos; não é carga real adicional. A integral é calculada por Gauss–Legendre de 3 pontos em cada trecho constante (exata para os polinômios integrados, salvo arredondamento).

Segmento	Axial (kN·m)	Flexão (kN·m)
E1.1	0	-0,00213449
E1.2	0	-0,00188337

Produto interno: -0,00401786 kN·m; termo de apoio: 0 kN·m; dividindo por Q^* : $\delta = -0,00401786$ m. Valor direto: -0,00401786. Diferença absoluta: 0.

Contribuições de sinais opostos refletem sentidos relativos dos esforços real e auxiliar. Maior flexibilidade aumenta o peso de uma região, mantidos os esforços. Na energia $U = \frac{1}{2} \int (N^2/EA + M^2/EI) dx$ aparece $\frac{1}{2}$ devido ao carregamento elástico progressivo; o produto cruzado real $\times$ virtual não contém esse fator.

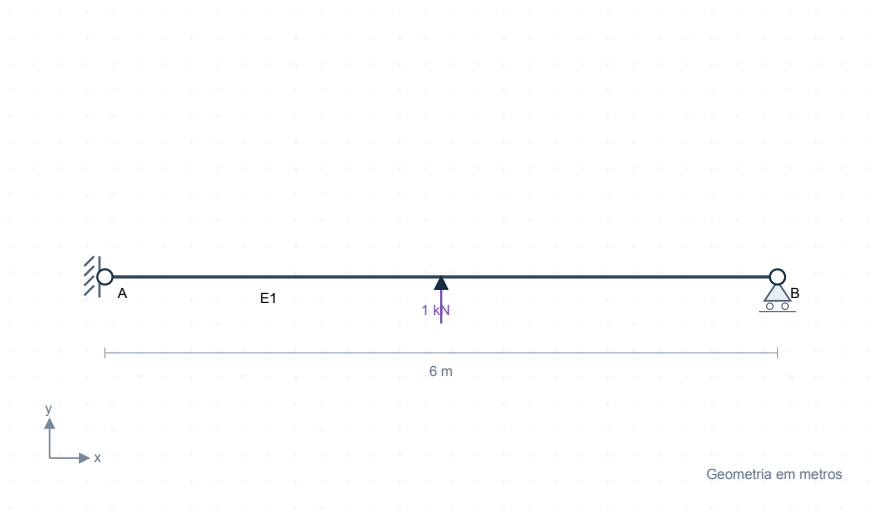


Figura 2. Sistema auxiliar, separado das ações reais.

Método das forças

Redundantes: B uy. Sistema principal obtido removendo esses vínculos; a fatoração confirmou sua estabilidade. Indeterminação remanescente: 0.

$$f X + \Delta^{(0)} = \Delta^{\text{prescrita}}$$

f =

1

0,00429

Coordenada	$\Delta^{(0)}$	Δ prescrito	Redundante X
B uy	-0,09642857	0	22,5

fij é o deslocamento generalizado em i causado por ação unitária em j, com unidade m/kN, m/(kN·m), rad/kN ou rad/(kN·m). Resposta recuperada por superposição da solução de cargas e das soluções unitárias. Diferença máxima de deslocamentos: 0; de redundantes e reações: 0.

8. Resultados e diagramas

Nó	ux (mm)	uy (mm)	θ (rad)	Rx (kN)	Ry (kN)	Mz (kN·m)
A	0	0	0	0	37,5	45
B	0	0	0,0026786	0	22,5	0

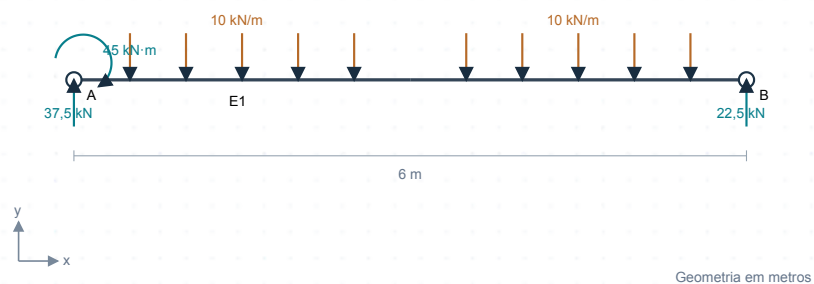
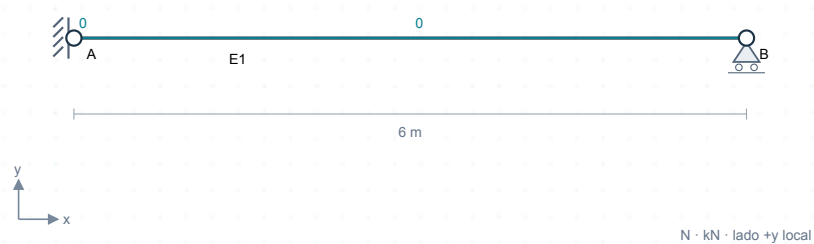
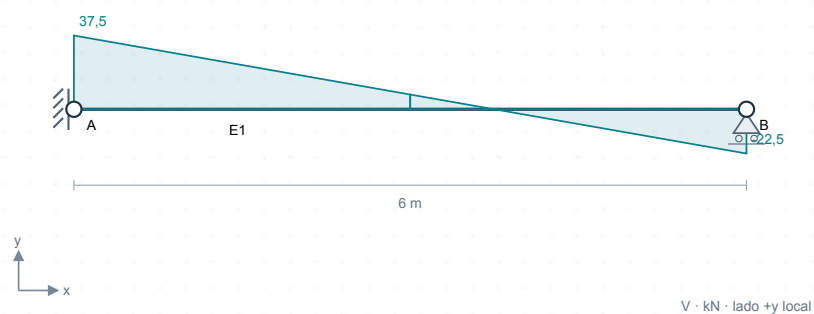


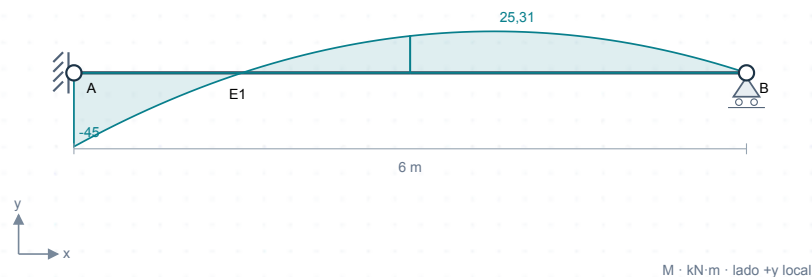
Diagrama de corpo livre. Reações em verde; ações em ocre.



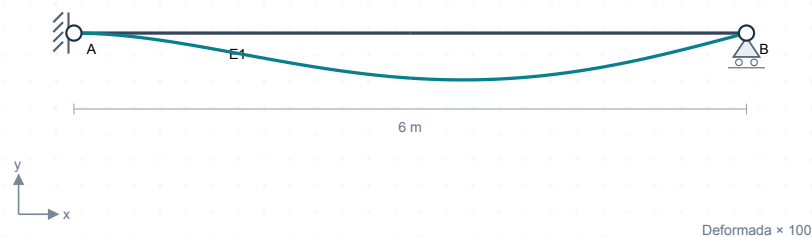
Esforço normal. Positivo: tração; negativo: compressão.



Cortante V. Saltos nas cargas concentradas.



Momento M. Positivo desenhado no lado +y local; saltos nos momentos concentrados.



Deformada amplificada 100 vezes. Recuperação inclui solução particular de cargas uniformes; não é somente interpolação nodal.

9. Verificações

Verificação	Resíduo	Tolerância	Estado
Equilíbrio global · ΣF_x	0 kN	3,000e-7	Atende
Equilíbrio global · ΣF_y	0 kN	3,000e-7	Atende
Equilíbrio global · ΣM_0	0 kN·m	9,000e-7	Atende
Equilíbrio nodal livre	0 kN / kN·m	9,000e-7	Atende
Vínculos prescritos	0 m / rad	1,000e-10	Atende
Equilíbrio dos elementos	0 kN / kN·m	9,000e-7	Atende
Energia · $ 2U - W $	0 kN·m	1,000e-8	Atende
Reciprocidade · trabalho cruzado	0 m	1,000e-9	Atende

Equilíbrio global sozinho não valida deslocamentos. Compatibilidade translacional vem dos nós compartilhados; rotações são compartilhadas apenas nas conexões rígidas. Simetria e casos-limite dependem da configuração, não são certificados para modelos arbitrários. Energia elástica: 0,07232143 kN·m.

10. Comparação dos métodos

Rigidez, auxiliar virtual e soluções do método das forças compartilham montagem e solver. As equações de flexibilidade e a integração cruzada são etapas distintas, mas sua concordância não constitui validação independente do núcleo.

Referência independente	Expressão	Calculado	Referência	Erro absoluto / relativo
Reação B	$3qL/8$	22,5 kN	22,5	0 / 0

11. Discussão física

Comentário didático de referência: A compatibilidade dá $R_B = 3qL/8 = 22,5$ kN. O engaste recebe 37,5 kN e momento de 45 kN·m.

Interpretação escrita pelo estudante:

Não fornecida.

Experimento registrado:

Não fornecido.

12. Limitações

Não implementa dimensionamento normativo, resistência, flambagem, dinâmica, plasticidade, grandes deslocamentos ou deformação por cisalhamento. Cargas distribuídas são constantes por trecho; cargas pontuais são inseridas por subdivisão. Diagramas são amostrados em 33 pontos por segmento; extremos exibidos são amostrais. As soluções nodais e a recuperação polinomial não dependem dessa amostragem para cargas suportadas. Seções variáveis exigem discretização e estudo próprio de convergência.

13. Conclusões relacionadas aos objetivos

Conclusão automática: o sistema reduzido foi resolvido e 8 de 8 verificações numéricas atenderam às tolerâncias indicadas. Isso verifica consistência do modelo linear dentro do alcance de cada teste; não certifica uma estrutura real.

Conclusão do estudante não fornecida. A aplicação não a infere a partir dos resultados.

14. Referências

[Felix Udoeyo · Structural Analysis, Work–Energy Methods](#)

[Eric R. Johnson · Aerospace Structures, Finite Element Method](#)

[PUC-Rio / Tecgraf · Ftool, manual de referência](#)

Referências analíticas: integração de $N = EA\varepsilon$ e $EI v'''' = q$ com os vínculos de cada exemplo; reação da viga engastada-apoiada por $\Delta B = 0$. Fórmulas e constantes nos testes entregues.

15. Apêndices: matrizes e reprodução

Ordenação global: A [ux, uy, θ]; B [ux, uy, θ]; @E1:1 [ux, uy, θ]. Índices abaixo são numerados a partir de 1.

Livres: 4, 6, 7, 8, 9. Prescritos: 1, 2, 3, 5. Inativos: .

K global =

1	2	3	4	5	6	7	8	9
280.000	0	0	0	0	0	-280.000	0	0
0	7.466,66667	11.200	0	0	0	0	-7.466,66667	11.200
0	11.200	22.400	0	0	0	0	-11.200	11.200
0	0	0	280.000	0	0	-280.000	0	0
0	0	0	0	7.466,66667	-11.200	0	-7.466,66667	-11.200
0	0	0	0	-11.200	22.400	0	11.200	11.200
-280.000	0	0	-280.000	0	0	560.000	0	0
0	-7.466,66667	-11.200	0	-7.466,66667	11.200	0	14.933,33333	0
0	11.200	11.200	0	-11.200	11.200	0	0	44.800

GDL	F	d	R
1 · A ux	0	0	0
2 · A uy	-15	0	37,5
3 · A θ_z	-7,5	0	45
4 · B ux	0	0	0
5 · B uy	-15	0	22,5
6 · B θ_z	7,5	0,002678571	0
7 · @E1:1 ux	0	0	0
8 · @E1:1 uy	-30	-0,004017857	0
9 · @E1:1 θ_z	0	-0,000669643	0

E1.1 · L = 3 m

Mapeamento: 1, 2, 3, 7, 8, 9. EA = 840.000 kN; EI = 16.800 kN·m².

k local antes de liberações =

1	2	3	4	5	6
280.000	0	0	-280.000	0	0
0	7.466,66667	11.200	0	-7.466,66667	11.200
0	11.200	22.400	0	-11.200	11.200
-280.000	0	0	280.000	0	0
0	-7.466,66667	-11.200	0	7.466,66667	-11.200
0	11.200	11.200	0	-11.200	22.400

T =

1	2	3	4	5	6
1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	1

Carga local equivalente: [0; -15; -7,5; 0; -15; 7,5]. Deslocamentos locais recuperados: [0; 0; 0; 0; -0,00401786; -0,00066964]. Esforços de extremidade: [0; 37,5; 45; 0; -7,5; 22,5].

E1.2 · L = 3 m

Mapeamento: 7, 8, 9, 4, 5, 6. EA = 840.000 kN; EI = 16.800 kN·m².

k local antes de liberações =

1	2	3	4	5	6
280.000	0	0	-280.000	0	0
0	7.466,66667	11.200	0	-7.466,66667	11.200
0	11.200	22.400	0	-11.200	11.200
-280.000	0	0	280.000	0	0
0	-7.466,66667	-11.200	0	7.466,66667	-11.200
0	11.200	11.200	0	-11.200	22.400

T =

1	2	3	4	5	6
1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	1

Carga local equivalente: [0; -15; -7,5; 0; -15; 7,5]. Deslocamentos locais recuperados: [0; -0,00401786; -0,00066964; 0; 0; 0,00267857]. Esforços de extremidade: [0; 7,5; -22,5; 0; 22,5; 0].

Projeto versionado e registro do estudante

```
{"format":"estrutura-lab","version":1,"model":{"version":1,"title":"Viga engastada e apoiada","kind":"beam","nodes":[{"id":"A","x":0,"y":0,"fix":[true,true,true],"prescribed":[0,0,0],"load":[0,0,0]},{id":"B","x":6,"y":0,"fix":[false,true,false],"prescribed":[0,0,0],"load":[0,0,0]}],"elements":[{"id":"E1","a":"A","b":"B","E":210,"A":40,"I":8000,"releaseA":false,"releaseB":false,"loads":[{"type":"uniform","from":0,"to":1,"x":0,"y":-10,"axes":"local"}]}],"query":{"element":"E1","at":0.5,"component":1},"redundants":[{"node":"B","component":1}],"notes":{"author":"Demonstração do laboratório"},"revision":1}
```